

Пирамида Ланжа при построении итогового теста по математике

В сбалансированном тесте студенты¹ имеют возможность показать то, что они знают и могут сделать. Преподаватели же смогут по результатам тестирования описать способности студентов и степень понимания учащимися усвоенного материала. Кроме того, преподаватели могут лучше описать неправильные представления студентов, частичное понимание и т.д. Учитель математики хочет получить от теста ответы на вопросы о математических способностях студентов типа:

- 1) студент имеет только основные умения и навыки?
- 2) действительно ли он в состоянии привести надлежащее (математическое) обоснование?
- 3) он может решить более сложные проблемы?

Поскольку преподаватель хочет иметь со школьником обратную связь, он должен знать, с какими предметными областями математики не справляются студенты и, возможно, они нуждаются в большем акценте на эту сферу при обучении в классе. Важно знать также, какие меры должны быть приняты, чтобы помочь наименее способным студентам и дать более одаренным достаточно много стимулирующих материалов.

Чтобы найти ответы на эти вопросы, преподаватели нуждаются в большом разнообразии задач и тестов на различных уровнях компетентности. Кроме того, математическое содержание проблемы и сложность решения задач нужно принимать во внимание.

¹ Здесь и далее употребляется слово «студент» для определения обучающихся на средней ступени обучения, то есть это – студенты средних специальных учебных заведений и учащиеся школ. Под преподавателями понимаются учителя в школе и преподаватели в средних специальных учебных заведениях.

Поскольку есть много факторов, которые надо принять во внимание, необходима помощь, чтобы свести хаос к определенному порядку. Для классификации проблем используется модель, известная как пирамида Яна де Ланжа [1]. Эта модель была первоначально разработана как треугольник (рис. 1)

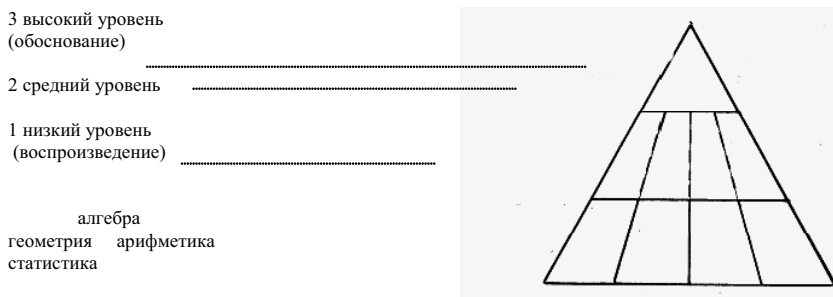


Рис. 1. Треугольник для дизайна теста

По горизонтали в треугольнике указаны основные математические предметные области, определяющие качество математического образования [2]. По вертикали приведены различные уровни компетентности от 1 до 3, которую студент должен иметь,

Первый математический вопрос, который возникает при рассмотрении фигуры на рис. 1: почему модель представлена в форме треугольника, а не прямоугольника.

Форма треугольника показывает число проблем и вопросов на различных уровнях в уравновешенном тесте, а также представляет деление внутри уровня. Уровень 1 – это базовый уровень математической подготовки. При подготовке учащегося на этом уровне требуется много времени и много заданий для оценки уровня подготовки. Естественно, что этот уровень лежит в основании треугольника. На уровне 3 уже используются задания более сложной формы, требующие от учащегося хорошего уровня подготовки по всем областям математики одновременно и, кроме того, на высоком уровне компетентности.

Чаще всего – это задания в открытой форме, требующие развернутого ответа. Это вершина треугольника. Поэтому в тесте, как правило, меньше заданий 2 и 3 уровней, так как выполнение их требует в разы больше времени, а слабые учащиеся чаще всего к таким заданиям вообще не приступают.

Поэтому разработка сбалансированного теста опирается на разработку заданий разного содержательного уровня, но и разного уровня компетентности.

Тем не менее использование такой модели показало, что форма треугольника недостаточна. Некоторые учителя используют данную модель при разработке теста, но применяя задания разной трудности внутри одного уровня компетентности и одной области. Тогда получается более сбалансированный тест с более высокой надежностью и валидностью. Например, при проверке базовых умений по арифметике на уровне простого воспроизведения необходимы в тесте задания и простые, и сложные, чтобы точнее определить уровень подготовки. Тогда треугольник превращается в пирамиду. Таким образом, появляется третья размерность – трудность задания.

Уровень 1: Воспроизведение полученных знаний: процедуры, понятия и определения.

Ответы на вопросы, маркированные уровнем 1, часто требуют знания фактов, определений и обычных процедур, которые запоминались и были отработаны в течение предыдущих уроков.

Ниже приводятся примеры заданий этого уровня, которые требуют знания фактов и определений (рис. 2).

<i>Что такое равносторонний треугольник?</i>
<i>Вычислите $7 \cdot 12$</i>
<i>Нарисуйте геометрическую фигуру с двумя параллельными линиями.</i>
<i>Как называется график, отображающий квадратичные взаимоотношения между двумя переменными?</i>

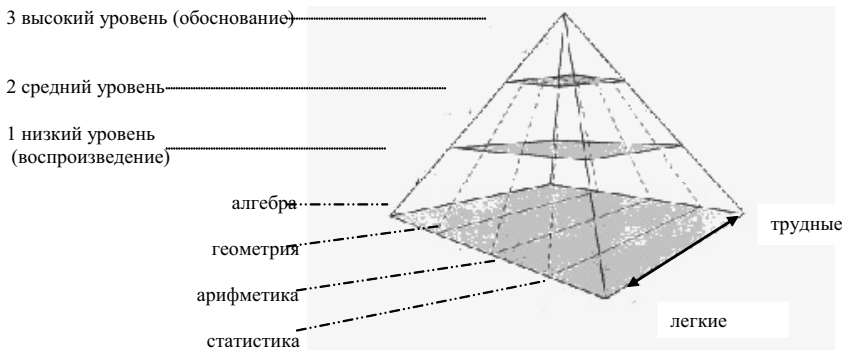


Рис. 2. Пирамида уравновешенного теста

Примеры вопросов, которые требуют использования обычных процедур:

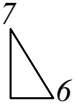
<i>Нарисуй график $y = 3x - 2$</i>
<i>Не используя калькулятор, вычисли $3674 : 26$</i>
<i>Измени запись числа 27 000 000 в научной нотации</i>
<i>Реши уравнение $x^2 + 3x - 17 = 0$</i>
<i>Вычисли $1/12 + 7/8$</i>

Значительная часть теста будет часто состоять из заданий уровня 1, чтобы определить, справляются ли учащиеся с основными фактами или навыками, преподававшимися им учителями. Уровень 1 – это чаще всего отдельные задания в закрытой форме. При решении больших контекстных проблем, которые состоят из большого числа заданий одинакового содержания, задания первого уровня часто используются как тесты «входа», дающие возможность студентам исследовать содержание контекста заданий.

Примеры вопросов, которые требуют применения стандартных алгоритмов:

Вычисли площадь круга с радиусом $r = 7$

Используя теорему Пифагора, вычисли длину неизвестной стороны этого прямоугольного треугольника:



Реши эту пропорцию: $x/7=2/15$

Изложение вопроса на уровне 1 не означает, что студенты не должны показать свою работу более подробно. Преподаватель иногда хочет определить, справился ли студент с некоторой обычной процедурой, однако если не справился, то важно знать, где не справился и почему. Когда нет никакой работы (записи решения), даже при том что правильный ответ дается, студент, возможно, достиг этого полностью неправильным способом, а оценке подлежит именно усвоение алгоритма решения. Ниже приводятся примеры для иллюстрации разного выполнения задания.

Тангенс прямой линии $5x - 8y - 3 = 0$ и положительной части оси X равен:

a. $5/8$

b. $-5/8$

c. $8/5$

d. $-8/5$

Ответ: а. Возраст: 14,15 лет. Уровень: 1. Содержание: зависимость и отношения, функции.

Почти полный ответ – а, потому что высота всегда меньше, чем длина по оси X , и положительна, так как говорится о положительной части оси X .

Вообще, если преподаватель не знает, как студент получил ответ, он не может дать рекомендаций студенту, то есть не будет обратной связи. Поэтому очень хорошо выделить на

листе некоторое пространство для записи решения, даже если вопросы давались с несколькими вариантами ответов, чтобы позволить студентам сделать вычисления и дать более полный ответ. Иногда важная информация может быть найдена в этой дополнительной записи (черновике), что может помочь понять и интерпретировать работу студента впоследствии.

Уровень 2: связи и интеграция для решения проблемы.

На этом уровне компетентности студенты должны сами выбрать собственные стратегии и собственные математические инструменты решения. Проблемы на этом уровне чаще могут быть решены несколькими правильными способами. Иногда студент решает проблему нетрадиционным способом, хотя ему уже преподавали более формальные пути. Это обеспечивает важной информацией преподавателя об уровне размышления студентов.

Кроме того, на этом уровне студент начинает делать связи между различными областями в математике. Информация объединена, чтобы решить относительно простые проблемы.

Возможно также, что в условии есть избыточная информация, и студент должен будет решить, какая информация является уместной, чтобы решить проблему.

На этом уровне компетентности, как ожидается, студенты будут обращаться с различными представлениями данных согласно определенной ситуации и цели, например текст, диаграммы, формулы, таблицы и так далее.

Для демонстрации использования различных стратегий решения проблемы приведем пример.

На копировальной машине Вы можете увеличить или уменьшить размер рисунка. Натан использовал машину, чтобы сделать копию из рисунка, уменьшая его размер на 60%. Он не был удовлетворен результатом, поэтому он взял копию и сделал новую в 140%. Он предполагал, что теперь он будет иметь снова первичный оригинал рисунка. Действительно ли Натан был прав? Объясните ваш ответ.

Возраст: 13, 14 лет. Уровень: 2. Содержание: арифметика.
Ответ: нет, Натан не прав.

Кодировка.

Если никакое объяснение не дается, никакие баллы не предоставляются студенту за правильное заключение, например, «Никогда не получит», «Нет» «Не прав!».

Возможные ответы учащихся:

*Я вычислил 140% от 60%; $1.40 \times 0.60 = 0.84$. Вторая копия равна 84% оригинала.

*Я предполагаю, что длина оригинального рисунка была 20 сантиметров. 60% от 20 равно 12; 140% от 12 = 16.8; вторая копия является меньше, чем оригинал.

*Студент сделал рисунки, чтобы поддержать свое рассуждение.

Данный уровень уже имеет аспект связей, а не просто прямое воспроизведение, что требует, чтобы студенты отличали и связывали различные утверждения: определения, примеры, предположения и доказательство.

Они должны знать и понимать различие между реалистической ситуацией и математической моделью и быть в состоянии перевести одно в другое. На этом уровне они, как правило, не могут моделировать ситуацию самостоятельно.

Уровень 3: математизация, математическое размышление и рассуждение, обобщение и понимание.

На этом уровне студенты должны:

А) математизировать ситуацию.

Дядя Питер принес большую сумку с кусками мрамора для трех из нас. «Делите справедливо», – сказал он. Как бы Вы сделали это?

Ответ можно было дать устно!

Возраст: 6, 7 лет. Уровень: 3. Содержание: арифметика, алгоритмизация подсчета.

Возможная студенческая работа:

*Мы даем мрамор каждому ребенку по порядку раз за разом. Если один или два куска мрамора остались, мы откладываем их в сумку.

*Мы делаем три ряда кусков мрамора. Если эти ряды равны по длине, мы разделим справедливо.

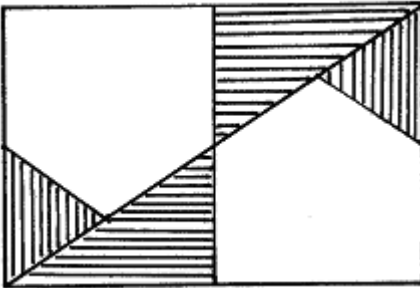
*Мы считаем, что даем каждому по пять кусков мрамора за раз одновременно. Каждый ребенок получает пять кусков мрамора, затем следующий получает и т.д., пока все не раздадим.

Б) распознать и извлечь математику, вложенную в ситуацию.

Какой способ покупки является лучшей сделкой: 3 части за 10\$ или 4\$ за часть и 15%-я скидка?

В) выбрать математические инструменты, чтобы решить более сложные проблемы.

Объяснить, почему Вы уверены, что белая часть этого рисунка является больше, чем заштрихованная часть.



Возраст: 11,12 лет. Уровень: 3. Содержание: отношения.

Возможные студенческие решения:

- *использование перераспределение (вырезать и перенести);
- *вычислить области и сложить;
- *использовать дроби;
- *использовать проценты.

Г) быть в состоянии сравнить математическое содержание с другими проблемами в похожем контексте и обобщить.

Например, ситуации в следующих проблемах, также как во многих других, используют то же самое математическое содержание, где линейные функции играют важную роль. Студенты, возможно, знают, что такое линейные функции и как можно их применять, если представлена таблица с данными и относительно показаны вовлеченные переменные, или как применить граф, который представляет линейные отношения. В течение уроков студенты могли видеть много различных контекстов применений линейных отношений.

Питер работает ремесленником. Он берет плату в 10\$ за пользование телефоном и 75\$ в час. Его друг Нолан берет плату в 25\$ за пользование телефоном и 70\$ в час. Сколько часов занимает эта работа, если они получили одинаковую сумму денег?

Высота стека кофейных чашек может быть вычислена, используя эту словесную формулу: высота (в см) = $7.5 + (\text{число чашек} - 1) \times 3.5$. Кухонная полка в ресторане, где эти чашки хранятся, имеет максимальную высоту 30 сантиметров. Сколько чашек может быть сохранено в одном стеке?

Как правило, Вы можете использовать эту формулу, чтобы узнать, имее ли Вы правильный вес: длина (в см) = вес (в кг) – 100. Дайте пример группы людей, для которых не работает эта формула.

В итоговом тесте, который дается намного позже в учебном году, задания включают полностью различный контекст, который студент не видел прежде. Теперь он должен быть способным к обобщению в незнакомой ситуации и думать. «Это – тот тип отношений, где начинать надо с фиксированного количества чего-то и с каждым следующим шагом добавлять (или вычитать) то же самое число».

Компетентности на этом уровне включают критический компонент и рассуждение о процессе решения. Студенты должны не только быть в состоянии решить проблемы, но также поставить вопросы и обсуждать их. Правильное математическое рассуждение требуется всегда, но студенты должны быть в состоянии и критиковать математическую модель, и реконструировать ее в случае необходимости. Они могут сделать математическую модель из реалистической ситуации, попробовать решить проблему, реконструировать модель, решить проблему, сделать переход назад к реалистической ситуации и решить, полезное ли было принято решение в пределах этой ситуации.

Стены в подвале будут окрашены. Площадь всех стен – 22 квадратных метра. В каком количестве канистр краски Вы нуждаетесь? Каждая канистра рассчитана для покраски трех квадратных метров.

Как отмечено в треугольнике Ланжа, на самом высоком уровне компетентности различие между математическими областями исчезает, иногда та же самая проблема может быть решена: геометрически или алгебраически! Студент сам выбирает ту стратегию решения, которая ему была известна, или скомпилирует обобщенную стратегию из предыдущих реше-

ний, или построит собственную стратегию, или даже изобретет новые стратегии.

Таким образом, тест по математике практически всегда содержит задачи разного типа по трудности, требующие от студента решения на разных уровнях компетентности, и по содержанию охватывает разные области учебного предмета.

Итак, имеются три уровня компетентности и четыре области, по трудности должны быть задания также трех уровней: простые, средние, сложные. А так как нереально оценивать ученика всего одним заданием, то лучше хотя бы тремя. Тогда длина теста будет равна 108 заданиям.

Рассчитаем время тестирования. На 1 уровне простые задания занимают 1 минуту, средние – 2 минуты, сложные – 3 минуты. На 2 уровне: простые – 4 минуты, средние – 6 минут, сложные – 8 минут. На 3 уровне: простые – 10 минут, средние – 15 минут, сложные – 20 минут. Тогда время выполнения такого теста составит почти 3,5 часа на каждую область. При аттестации необходимо оценить общий уровень, включая все области математики, тогда понадобится целых 14 часов, чтобы получить надежные и достоверные оценки.

В этом случае следует применять не классический дизайн теста по пирамиде Ланжа, а обобщенный по ротационной и юнитной модели, что позволяет при применении измерений по шкале Раша достигать надежных оценок всего за 3 часа. При этом в дизайне теста по-прежнему используется пирамида Ланжа, но не конкретно по каждому своему элементу, а в обобщенном варианте на все формы¹ теста. Но это уже тема другой статьи.

¹ Форма теста – это вариант одного и того же теста, которым измеряются достижения учащихся одновременно и в одном и том же месте. При обобщенной модели пирамиды Ланжа варианты теста различаются по содержанию и трудности заданий, хотя и обеспечивается заданная мера измерения. То есть современный дизайн теста (пирамида Ланжа) – это не структура, содержание и оценка внутри одной формы, а репрезентативно распределенная пирамида на все формы теста. В этом случае возможно сократить длину теста до 20–30 заданий на одну форму.

Список литературы

1. Lange, J. de (2007). On design of items, especially more complex ones. FI, NL.
2. См., например, отчеты по ТИМСС и ПИЗА, в которых именно эти области математики и анализируются.