

Дифракция коротких сферических звуковых волн на вытянутом сфероиде

Для современного уровня развития акустики характерно чрезвычайно широкое применение акустических методов для решения разнообразных задач не только в физике, но также и в информационной и измерительной технике, промышленности, медицине, биологии, военном деле и т. д.

Первое (в порядке исторического становления) важное прикладное направление в акустике связано с получением при помощи акустических волн информации о свойствах и строении веществ, о происходящих в них процессах. Применяемые в этих случаях методы основаны на измерении скорости распространения и коэффициента поглощения ультразвука на разных частотах (в газах и твердых телах). Такие исследования позволяют получать информацию об упругих и прочностных характеристиках материалов, о степени их чистоты и наличии примесей, о размерах неоднородностей, вызывающих рассеяние и поглощение волн, и т. д. Большая группа методов базируется на эффектах отражения и рассеяния упругих волн на границе между различными средами, что позволяет обнаруживать присутствие инородных тел и их местоположение. Эти методы лежат в основе таких направлений, как гидролокация, неразрушающий контроль изделий и материалов, медицинская диагностика. Применение акустической локации в гидроакустике имеет исключительное значение, поскольку звуковые волны являются единственным видом волн, распространяющихся на большие расстояния в естественной водной среде. Как разновидность дефектоскопии, широко применяемой в промышленности, можно рассматривать ультразвуковую диагностику в медицине. Даже при небольшом различии в плотности биологических тканей происходит отражение ультразвука на

их границах. Поэтому ультразвуковая диагностика позволяет выявлять образования, не обнаруживаемые с помощью рентгеновских лучей. В настоящее время развитие дефектоскопии привело к созданию акустической томографии. В этом методе с помощью набора приемников ультразвука или одного сканирующего приемника регистрируются упругие волны, рассеиваемые в разных направлениях, а затем с использованием компьютерной обработки сигналов на экране дисплея формируется объемное изображение внутренней структуры исследуемого объекта.

Другим важным прикладным направлением акустики является активное воздействие ультразвуком на вещество. Такое воздействие широко используется в промышленной технологии для поверхностной обработки деталей, сварки, интенсификации химических процессов и т. д. В жидкостях основную роль при таком воздействии играет кавитация – образование в интенсивной звуковой волне пульсирующих пузырьков. Схлопывание пузырьков сопровождается мощным гидродинамическим возмущением и сильным локальным разогревом вещества, в результате чего разрушается поверхность твердого тела, находящегося в области кавитации. Применение ультразвука для воздействия на живой организм в медицине основывается на эффектах, возникающих в биологических тканях при прохождении через них акустических волн. При умеренной интенсивности звука (до 1 Вт/см^2) колебания частиц среды вызывают микромассаж тканей, а поглощение звука – локальный разогрев, что применяется в ультразвуковой терапии. При больших интенсивностях сильное нагревание и кавитация вызывают разрушение тканей. Для хирургических операций используется сфокусированный ультразвуковой пучок, который позволяет производить локальные разрушения в глубинных структурах (например, мозга или почки) без повреждения окружающих тканей.

Таким образом, многие акустические эффекты, используемые на практике, являются следствием тонких физических эффектов, в современной науке объясняемых порой только математическими методами. Одним из таких явлений являются дифракционные эффекты. Явлением дифракции в широком смысле слова называется поведение волн в некоторой области, имеющей границу с теми или иными свойствами. Теория дифракции, рассматривающая волновые движения, описываемые линейными дифференциальными уравнениями в частных производных с линейными же краевыми условиями, занимает между физикой и прикладной математикой некоторое промежуточное положение, сдвигающееся с течением времени к последней.

Как стационарные (для установившихся по времени гармонических колебаний), так и нестационарные задачи дифракции возникают и решения их используются в тех разделах физики, которые имеют дело с волновыми движениями, т. е. в акустике, оптике, радиофизике, динамической теории упругости, гидродинамике и др. К дифракционным относятся выходящие за рамки геометро-оптических вопросы распространения разного рода волн в условиях, осложненных природными (неоднородная атмосфера, море, земля) или техническими (неоднородные волноводы) обстоятельствами, огибание волнами различных препятствий, проникновение сквозь отверстия, решетки или прозрачные препятствия, отражение и поглощение волн различными объектами, в частности рассеяние волн на плазменных объектах, а также рассеяние нуклонов высоких энергий на атомных ядрах, излучение волн поверхностями (антенны), возбуждение поверхностных волн и другие вопросы. Отсюда видно, что с точки зрения приложений теория дифракции близка к физике.

С другой стороны, теория дифракции как наука ближе к математике. Действительно, любая задача дифракции независимо от ее отношения к тому или иному разделу физики может

быть математически сформулирована в стационарном случае как краевая задача для уравнения эллиптического типа (или для системы таких уравнений); в нестационарном же случае – как смешанная задача с начальными и краевыми условиями для уравнения гиперболического типа (или системы таких уравнений). Оба типа задач, для широкого класса которых доказаны теоремы о существовании решения, как известно, рассматриваются в математике. С математической точки зрения целью теории дифракции является, во-первых, разработка аналитических и вычислительных методов нахождения решений таких задач для волновых уравнений с постоянными или переменными коэффициентами в областях различной формы при разных граничных условиях и, во-вторых, изучение и классификация свойств решений этих задач – свойств, отражающих поведение волн в различных условиях, то есть явления дифракции. Однако выбор конкретных задач теории дифракции и появление новых направлений часто обуславливаются не внутренней логикой развития теории, а потребностями вышеуказанных разделов физики. Поэтому разработкой дифракционных проблем в настоящее время занимаются как физики, так и математики, роль которых в развитии теории непрерывно возрастает. Так, например, достигнутые за последние годы большие успехи в теории дифракции нестационарных волн, стимулированные потребностями механики сплошных сред, обуславливаются в основном активным участием математиков.

Теория дифракции развивается в настоящее время настолько быстро, что монографическая литература как у нас, так и за границей не успевает отражать это развитие. Трудно найти книгу, всесторонне охватывающую методы и результаты современной теории дифракции. Помимо сложности обобщения не одной тысячи журнальных статей, это объясняется трудностью систематического описания методов в условиях, когда почти ежегодно появляются решения или исследования свойств решений таких задач, которые на протяжении десят-

ков лет казались непреодолимо трудными для математического рассмотрения.

Проблеме решения одной из подобных задач посвящена данная работа.

В книге А.А. Клещева, Л.С. Шейба [1, с. 264–268] получено аналитическое решение задачи дифракции сферических звуковых волн на идеальном вытянутом сфероиде, где давление рассеянной волны представлено в виде

$$P_s = 2 \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} \frac{B_{mn}}{N_{mn}(c)} S_{mn}(c, \eta) R_{mn}^{(3)}(c, \xi) \cos m\varphi, \quad (1)$$

$$B_{mn} = -ik(2 - \delta_{0m}) S_{mn}(c, \eta_1) R_{mn}^{(3)}(c, \xi_1) \frac{\Omega R_{mn}^{(1)}(c, \xi)}{\Omega R_{mn}^{(3)}(c, \xi)} \Big|_{\xi=\xi_0},$$

где k – волновое число, δ_{0m} – символ Кронекера, $c = kd/2$ – волновой размер сфероида, d – его межфокусное расстояние, $S_{mn}(c, \eta)$ – угловая вытянутая сфероидальная функция 1-го рода, $R_{mn}^{(j)}(c, \xi)$ – радиальная вытянутая сфероидальная функция j -го рода, $\Omega = 1$ для акустически мягких и $\Omega = \frac{\partial}{\partial \xi}$ для акустически жестких сфероидов, $(\xi_1, \eta_1, \varphi_1)$ – сфероидальные координаты источника сферической волны, ξ_0 – координата поверхности сфероида, $N_{mn}(c)$ – норма угловой сфероидальной функции.

Наиболее полно исследован частный случай решения (1), когда дифрагирует плоская волна, падающая вдоль оси абсолютно жесткого сфероида [2]. Случай наклонного падения волны для подобной задачи рассмотрен G.C. Lauchle [3 p, 568–575]. Настоящая работа ставит своей целью получение новых результатов, когда падающая волна – сферическая, а сфероид как абсолютно жесткий, так и абсолютно мягкий.

Двойной ряд (1) обладает хорошей сходимостью к точному решению для небольших c . В случае, когда длина звуковой волны мала по сравнению с размерами препятствия ($c > 1$), его

сходимость резко ухудшается, что представляет большие трудности при проведении численных расчетов. Поэтому на основе строгого решения задачи дифракции сферической звуковой волны на идеальном сфероиде будем строить приближенные асимптотические формулы для случая, когда сфероид тонкий, а длина падающей волны много меньше его геометрических размеров. Для построения приближенного решения воспользуемся следующими асимптотическими представлениями сфероидальных функций [4]:

$$S_{mn}(c, \eta) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} (1 - \eta^2)^{m/2} D_{n-m}(\sqrt{2c}\eta),$$

$$R_{mn}^{(3)}(c, \xi) \xrightarrow[\xi_0 \rightarrow 1]{c \rightarrow \infty} \left(\frac{\pi}{2c}\right)^{1/2} H_m^{(1)}(x),$$

$$\frac{\partial R_{mn}^{(3)}(c, \xi)}{\partial \xi} \xrightarrow[\xi_0 \rightarrow 1]{c \rightarrow \infty} \frac{x}{\xi^2 - 1} \left(\frac{\pi}{2c}\right)^{1/2} \frac{dH_m^{(1)}(x)}{dx},$$

$$N_{mn}(c) \xrightarrow{c \rightarrow \infty} (n-m)! \left(\frac{\pi}{c}\right)^{1/2},$$

где $D_{n-m}(\sqrt{2c}\eta)$ – функция параболического цилиндра, $H_m^{(1)}(x)$ – цилиндрическая функция Ханкеля 1-го рода с аргументом

$$x = c\sqrt{\xi^2 - 1} \left[1 - \frac{2(n-m)+1}{2c} - \frac{(n-m)^2 + (n-m)+1}{4c^2} + \dots \right].$$

Подставим эти формулы в ряд (1). После несложных преобразований получим следующее выражение для давления рассеянной волны:

$$P_s \xrightarrow[\xi_0 \rightarrow 1]{c \rightarrow \infty} -ik \sqrt{\frac{\pi}{c}} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) (1 - \eta_1^2)^m \frac{D_{n-m}(\sqrt{2c}\eta_1)}{(n-m)!} H_m^{(1)}(x_1) \times \\ \times (1 - \eta^2)^m D_{n-m}(\sqrt{2c}\eta) H_m^{(1)}(x) \cos m\varphi \frac{\Omega J_m(x)}{\Omega H_m^{(1)}(x)} \Big|_{x=x_0}.$$

Здесь Ω – оператор дифференцирования по переменной

x для жесткого сфероида, и единичный оператор – для мягкого сфероида.

Рассмотрим дальнюю зону поля. Учитывая асимптотические формулы

$$R_{mn}^{(3)}(c, \xi) \xrightarrow{c\xi \rightarrow \infty} (-i)^{n+1} \frac{e^{ic\xi}}{c\xi}, \eta \longrightarrow \cos\theta$$

$$\text{и} \quad P_s \longrightarrow F(\theta, \varphi) \frac{e^{ikr}}{kr},$$

получим для амплитуды рассеянной волны $F(\theta, \varphi)$ следующее выражение:

$$F(\theta, \varphi) = \sqrt{2k} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (-i)^n (2 - \delta_{0m}) \sin^m(\theta) D_{n-m}(\sqrt{2c}\eta_1) \cos m\varphi \times \\ \times DF_{n-m}(\sqrt{2c} \cos\theta) (1 - \eta_1^2)^{\frac{m}{2}} H_m^{(1)}(x_1) \begin{cases} J'_m(x) / H'_m(x) \Big|_{x=x_0} \\ J_m(x_0) / H_m(x_0) \end{cases}, \quad (2)$$

$$\text{где} \quad DF_{n-m}(x) = \frac{D_{n-m}(x)}{(n-m)!}.$$

Отметим, что рекуррентные формулы для многочленов $D_{n-m}(x)$ и $DF_{n-m}(x)$ имеют вид

$$D_{n+1}(x) = xD_n(x) - nD_{n-1}(x),$$

$$DF_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} (xDF_n(x) - DF_{n-1}(x)),$$

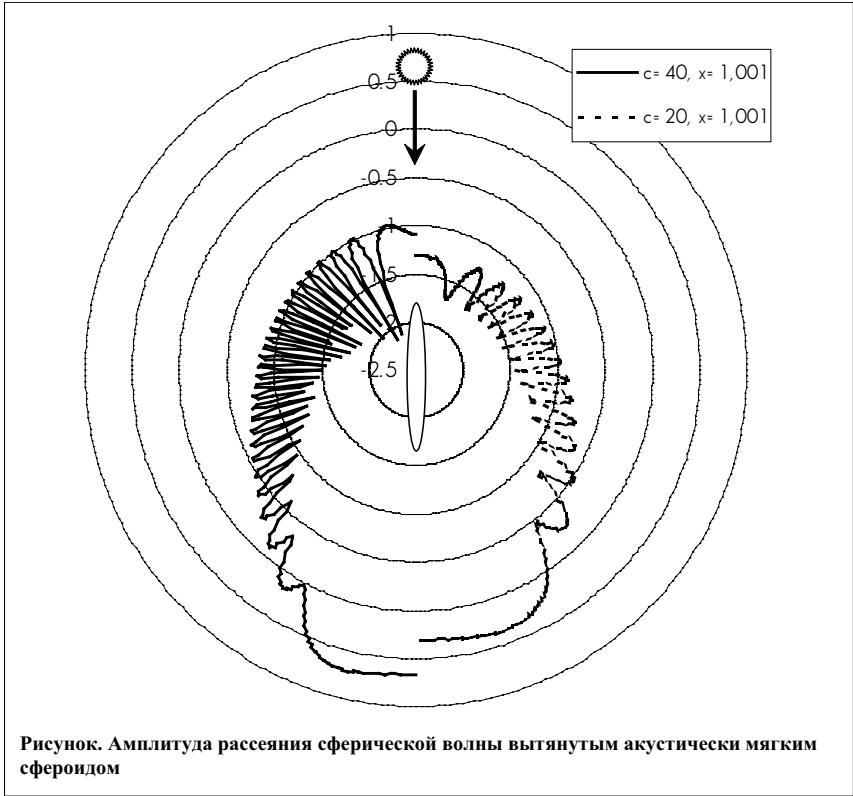
$$D_0(x) = DF_0(x) = e^{-x^2/4},$$

$$D_1(x) = DF_1(x) = xe^{-x^2/4}.$$

Для численных расчетов были выбраны сфероиды с координатной поверхностью $\xi_0 = 1,005$ и $\xi_0 = 1,001$, что соответствует отношению большой и малой полуосей сфероида как 5:1 и 10:1. Значение c бралось равным 20, 40.

Численное исследование сходимости ряда (2) показало, что, исходя из асимптотических представлений для функции $R_{mn}^{(3)}$, мы вынуждены брать ограниченное число членов ряда внутренней суммы $n \approx c$. Однако вклад последних 2–3 членов этого усеченного внутреннего ряда весьма незначителен. В связи с этим вполне можно ограничиться числом членов ряда порядка $[c]$. (Квадратные скобки означают целую часть числа.) Данный вывод находится в полном согласии с результатами работы Дебая [5, S. 535–558]. Наоборот, сходимость внешнего ряда по m не вызывает вопросов. Как показали расчеты, для различных волновых размеров и конфигурации сфероида можно применять выводы работы [3], а именно учитывать число членов внешней суммы по m , равное $2kR$, где R – величина малой полуоси сфероида.

На рисунке приведены результаты расчетов диаграмм направленности звукового поля, рассеянного в плоскости $\varphi = 0; \varphi = \pi$ для абсолютно мягких сфероидальных рассеивателей при различных значениях c и ξ_0 . Координата источника полагалась $\xi_1 = 2$. По полярной оси откладывалось значение $\lg|F(\theta, \varphi)|$.



Список литературы

1. Клецев А.А., Шейба Л.С. Рассеяние звуковой волны идеальными вытянутыми сфероидами // Акуст. журн. 1970. Т.16. № 2.
2. Конюхова Н.Б., Пак Т.В. Дифракция плоской звуковой волны на жестком вытянутом сфероиде. М.: ВЦ АН СССР, 1985.
3. Lauchle G.C. Short-wavelength acoustic diffraction by a prolate spheroids // J. Acoust. Soc. Amer. 1975. V. 58. № 3
4. Скучик Е. Основы акустики. М.: Мир, 1976.
5. Debye P. Näherungs formeln für die Zylinderfunktionen für große Werte des Arguments und Index // Math. Ann. 1909. № 67.